**Л 9. Понятие монотонности функции. Локальный экстремум функции. Необходимое и достаточное условия экстремума. Асимптоты графика функции. Схема исследования графика функции.**

**Цель лекции:** сформировать у студентов понимание монотонности функции, критических точек, условий существования локальных экстремумов. Научить исследовать графики функций с использованием первой и второй производных, определять асимптоты и строить схему исследования функции.

**Основные вопросы**

- Монотонность функций: возрастание, убывание.
- Связь монотонности со знаком производной.
- Критические точки функции.
- Необходимое условие экстремума.
- Достаточное условие экстремума (метод первой производной).
- Достаточное условие экстремума через вторую производную.
- Выпуклость, вогнутость, точки перегиба.
- Асимптоты графика функции: вертикальные и наклонные.
- Условия существования асимптот.
- Схема исследования графика функции (пошаговый алгоритм).

**Краткое содержание:** Лекция посвящена исследованию поведения функций с помощью производных. Рассматриваются определения монотонности, критических точек, локальных максимумов и минимумов, признаки экстремумов, методы исследования выпуклости и точек перегиба. Изучаются вертикальные и наклонные асимптоты функций и формулируется общая схема исследования графика функции

**Определение.** Функция $y = f(x)$ называется строго возрастающей (убывающей) в интервале $(a,b)$, если $\forall x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in (a,b)$ выполняется $f(x_1) < f(x_2)$ (или $f(x_1) > f(x_2)$) (сравните с понятием монотонного возрастания и убывания).

Следующая теорема позволяет найти интервалы возрастания и убывания функций с помощью ее производной.

**Теорема.** Пусть $y = f(x)$ дифференцируема в $(a,b)$:

1. Если $f(x)$монотонно возрастает в (a,b) , то $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$.

2. Если $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in (a,b)$, то $f(x)$ монотонно возрастает в $(a,b)$.

Аналогичная теорема имеет место и для убывающих функций. Итак, в интервалах возрастания или убывания функции знак производной не меняется.

**Определение.** Точка $x_0$, в которой $f(x_0)$ непрерывна, а производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует, называется критической точкой этой функции.

**Теорема (необходимое условие экстремума).** Пусть $x_0$ – экстремальная точка функции $y = f(x)$, тогда $x_0$ – критическая точка этой функции.

**Пример.** Функция $y = x^3$ имеет критическую точку $x_0 = 0$, так как это единственное решение уравнения $f'(x) = 3x^2 = 0$.

Однако экстремальных точек у этой функции нет, $y = x^3$ строго возрастает на всей числовой оси.

**Теорема (достаточное условие экстремума)**. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в окрестности $U(x_0)$ критической точки $x_0$ и дифференцируема в $U(x_0)$ кроме быть может самой точке $x_0$. Тогда

1) если в $U(x_0)$ $f'(x) > 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) < 0$ при $x > x_0$, то $x_0$ - точка максимума;

2) если в $U(x_0)$ $f'(x) < 0$ при $x < x_0$ и $f'(x) > 0$ при $x > x_0$, то $x_0$ - точка минимума;

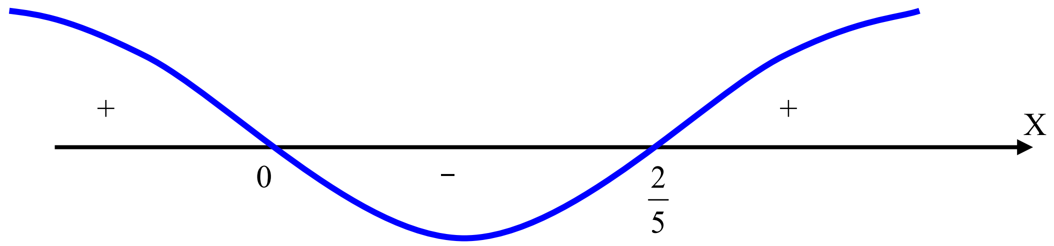
3) если в $U(x_0)$ $f'(x) > 0$ или $f'(x) < 0$ при $x \neq x_0$, то в $x_0$ - экстремума нет.

Итак, чтобы определить экстремальные точки функции необходимо найти все ее критические точки и установить знаки производной в интервалах между ними. Затем согласно достаточному условию экстремума исследуются найденные критические точки. Точки непрерывности функции, где производная меняет свой знак с «плюса» на «минус», являются точками максимума; точки, где производная меняет свой знак с «минуса» на «плюс», являются точками минимума; точки, где производная свой знак не меняет, экстремальными не являются.

**Пример.** Исследовать функцию $y = (x-1)x^{2/3}$ на возрастание, убывание и экстремумы.

Производная функции $f'(x) = \dfrac{5x-2}{3x^{1/3}}$ не существует при $x_1 = 0$.

Из уравнения $\dfrac{5x-2}{3x^{1/3}} = 0$ получаем вторую критическую точку $x_2 = \dfrac{2}{5}$. Методом интервалов определяем знаки $f'(x)$ (рис.).



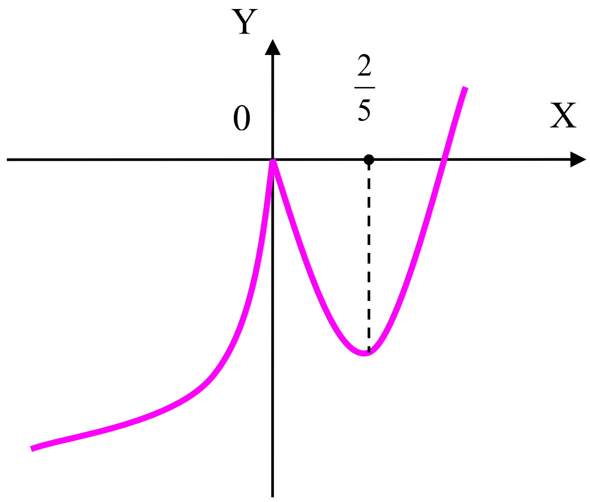

Функция $y = (x-1)x^{\frac{2}{3}}$ всюду непрерывна; согласно достаточному условию экстремума $x_1$=0 есть точка максимума, а $x = \dfrac{2}{5}$ точка минимума.

В интервалах $(-\infty, 0)$ и $(\frac{2}{5},+\infty)$ эта функция возрастает, а в интервале $(0,\frac{2}{5})$ она убывает. Результаты исследования занесем в таблицу.

Построим теперь эскиз графика функции, учитывая, что при $x \to 0$ $f'(x)$ является бесконечно большой (рис.).

Приведем еще один достаточный признак экстремума, использующий вторую производную функции.

| x | $(-\infty,0)$ | 0 | $(0,\frac{2}{5})$ | $\frac{2}{5}$ | $(\frac{2}{5}, +\infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f '(x) | + | не $\exists$ | – | 0 | + |
| f (x) | ↗ | 0 max | ↘ | $-\frac{3}{5}\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{3}{2}}$ min | ↗ |




**Теорема.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в некоторой окрестности критической точки $x_0$ и $f''(x_0)$ существует. Тогда, если $f''(x_0) > 0$, то $x_0$ - точка минимума, а если $f''(x_0) < 0$, то $x_0$ - точка максимума.

**Пример.** Найти $\max\limits_{[-2,3]} f(x)$ и $\min\limits_{[-2,3]} f(x)$ для $f(x) = x^3 - 3x + 3$. $f'(x) = 3x^2 - 3$ существует для всех $x$. Из уравнения $3x^2 - 3 = 0$ получаем критические точки $x_{1,2} = \pm 1$, $x_{1,2} \in [-2,3]$, $f''(x) = 6x$, $f''(1) = 6 > 0$, $x_1 = 1$ – точка минимума. $f''(-1) = -6 > 0 \Rightarrow x_2 = -1$ точка максимума. Поэтому $f(-2) = 1$, $f(3) = 27 - 9 + 3 = 21$, $f(-1) = -1 + 3 + 3 = 5$, $f(1) = 1 - 3 + 3 = 1$

$$\max_{[-2,3]} f(x) = \max\{f(-2), f(3), f(-1)\} = \max\{1,21,5\} = 21 \min_{[-2,3]} f(x) =$$

$$\min\{f(-2), f(3), f(1)\} = \min\{1,21,1\} = 1$$

**Выпуклость и точки перегиба.** Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в $(a,b)$.

**Определение.** Функция $y = f(x)$ называется выпуклой вниз (вверх) в интервале $(a,b)$, если для любого $x_0 \in (a,b)$ значение функции в $\forall x \in (a,b)$ не меньше (не больше) соответствующей ординаты касательной к графику функции, проведенной в точке $(x_0,\ f(x_0))$.

**Теорема.** Пусть функция $y=f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в $(a,b)$. Эта функция выпукла вниз (вверх) на этом интервале тогда и только тогда, когда $f''(x)\geq 0 \quad f''(x)\leq 0 \quad \forall x\in(a,b)$.

1) Пусть $y=f(x)$ выпукла вниз на $(a,b)$, тогда $y_\phi - y_k \geq 0$ и $f''(c_1)\geq 0$. Перейдем к пределу при $x\to x_0$, получаем, в силу непрерывности $f''(x)$, что

$$\lim_{x\to x_0} f''(c_1)=f''(x_0)\geq 0.$$

2) Пусть $f''(x)\geq 0$, $\forall x\in(a,b)$, тогда получаем, что $y_\phi - y_k \geq 0$, $\forall x_0,\ \ x\in(a,b)$, т.е. эта функция выпукла вниз.

Аналогично рассмотрите случай функции, выпуклой вверх.

**Пример.** Гипербола $y=1/x$ в интервале $(0,+\infty)$ выпукла вниз, так как $f''(x)=\dfrac{2}{x^3}>0, \quad \forall x_0(0,+\infty)$, на интервале $(-\infty,0)$–∞, 0) она выпукла вверх, так как $\dfrac{2}{\mathrm{x}^3}<0$, $\forall x\in(-\infty,0)$.

**Определение.** Точка $x_0$ называется точкой перегиба для функции $y=f(x)$, если в некоторой окрестности этой точки график функции лежит по разные стороны от касательной к графику, проведенной в точки $x_0$, т.е. для $x>x_0$, $y_\phi - y_k \geq 0$, а для $x<x_0$, $y_\phi - y_k \leq 0$ или наоборот. Точку $x_0$, в которой имеется вертикальная касательная, называют точкой перегиба, если направления выпуклости функции по разные стороны от $x_0$ противоположны

**Теорема** (необходимое условие существования точки перегиба). Пусть функция $y=f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в $U(x_0)\setminus\{x_0\}$ и непрерывна в $x_0$. Тогда → если → $x_0$ → точка → перегиба → то $f''(x_0)=0$ или не существует.

Такие точки $x_0$, в которых $f(x_0)$ непрерывна, а $f''(x_0)=0$ или не существует, называются критическими точками второго порядка.

**Пример.** У функции $y=x^4$ точка $x_0=0$ является критической второго порядка, так как $f''(x)=12x^2$ и $f''(0)=0$ Однако эта точка не является точкой перегиба, так как $f''(x)\geq 0$ и функция всюду выпукла вниз (лежит выше касательной).

**Теорема (достаточное условие существования точки перегиба).** Пусть функция $y=f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в $U(x_0)\setminus\{x_0\}$ и непрерывна в $x_0$, где $x_0$ – критическая точка второго порядка. Тогда, если при $x<x_0$ и $x>x_0$, $f''(x)$ имеет разные знаки, то $x_0$ – точка перегиба этой функции. Если же при $x<x_0$ и $x>x_0$, знаки $f''(x)$ совпадают, $x_0$ – не точка перегиба. Итак, чтобы найти точки перегиба функции, необходимо найти все ее критические точки второго порядка и исследовать каждую из них с помощью достаточного условия точки перегиба.

**Определение.** Прямая $L$ называется асимптотой для кривой $k$, если расстояние от точки $M$ на $k$ до $L$ стремится к нулю при удалении $M$ в бесконечность (т.е. при $|OM| \to \infty$).

Асимптоты графика функции $y = f(x)$ (коротко говорят асимптоты функции) делятся на два вида: 1) вертикальные асимптоты, т.е. прямые, параллельные оси $Oy$, они имеют уравнения вида $x = x_0$; 2) наклонные асимптоты, т.е. прямые, не параллельные оси $Oy$, они имеют уравнения вида $y = kx + b$.

Ясно, что функция может иметь сколько угодно вертикальных асимптот и не более двух наклонных: правую и левую. Правая асимптота определяется при абсциссе $x \to +\infty$, а левая при $x \to -\infty$.

**Примеры:**

1). Функция $y = x^2$ не имеет асимптот.

2). Функция $y = tgx$ имеет бесконечное множество вертикальных асимптот вида $y = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in Z$ и не имеет наклонных асимптот.

3). Функция $y = 1/x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$, для левой и правой ветвей гиперболы и левую и правую наклонную асимптоту $y = 0$.

4). Функция $y = |x|$ имеет левую наклонную асимптоту $y = -x$ и правую $y = x$. Вертикальных асимптот у нее нет.

**Теорема (о вертикальной асимптоте).** Прямая $x = x_0$ является вертикальной асимптотой функции *y=f(x)* только в том случае, когда при $x \to x_0-$ или $x \to x_0+$ эта функция является бесконечно большой.

Геометрический смысл этой теоремы ясен.

**Теорема (о наклонной асимптоте).** Прямая $y = kx + b$ является правой (левой) наклонной асимптотой функции $y = f(x)$ в том и только том случае, когда существуют (конечные) пределы

$$k = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \frac{f(x)}{x} \quad \text{и} \quad b = \lim_{\substack{x \to +\infty \\ (x \to -\infty)}} \left( f(x) - kx \right).$$

**Схема исследования и построения графика функции**

Чтобы исследовать функцию $y = f(x)$ и построить ее график, действия рекомендуется проводить в следующем порядке.

1. Нахождение области определения функции. Исследование на четность, нечетность, периодичность. Нахождение точек пересечения графика с осями координат.

2. Исследование функции на непрерывность. Вычисление пределов функции при $x$, стремящемся к границам области определения и к точкам разрыва.

3. Нахождение асимптот функции.

4. Вычисление $f'(x)$ и исследование ее знаков. Нахождение интервалов возрастания, убывания и экстремумов.

5. Вычисление $f''(x)$ и исследование ее знаков. Нахождение интервалов направления выпуклости и точек перегиба.

6. Построение таблицы, в которой указываются все найденные точки разрыва, критические точки первого и второго порядка и интервалы между ними. В каждом интервале характеризуется поведение функции.

7. Построение графика функции с учетом ее асимптот и таблицы. При необходимости можно вычислить промежуточные значения функции.

**Вопросы для самоконтроля**

1. Что означает, что функция строго возрастает или убывает?
2. Как знак первой производной связан с монотонностью функции?
3. Что называют критической точкой функции?
4. Сформулируйте необходимое условие существования экстремума.
5. Как определить максимум или минимум методом первой производной?
6. Как используется вторая производная при исследовании экстремумов?
7. Что означает выпуклость и вогнутость графика функции?
8. Дайте определение точки перегиба.
9. Что такое вертикальная асимптота?
10. Как найти наклонную асимптоту функции?
11. Перечислите основные шаги исследования функции перед построением графика.

**Литература**

1. Махмеджанов Н., Махмеджанова Р.Н. Сборник задач по высшей математике. – 2009. – 408 стр
2. Н.М. Махмеджанов. Сборник заданий по высшей математике. Алматы: «Қазақ Университеті», 2021
3. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа, 2005. Т.1. Т.2.
4. Демидович Сборник задач по математическому анализу